

# **KN II - Zusammenfassung**

Lorenz Prochaska, Jonas Pablo Stienen

Wintersemester 08/09

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Markov-Ketten</b>	<b>3</b>
1.1	Begriffe . . . . .	3
1.2	Formeln . . . . .	4
1.3	stationäre Verteilung . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Markov-Prozesse</b>	<b>5</b>
2.1	Begriffe . . . . .	5
2.2	Formeln . . . . .	5
2.3	stationäre Verteilung . . . . .	5
2.4	Eingebettete Markov-Kette eines Markov-Prozesses . . . . .	6
2.5	Poisson-Prozesse . . . . .	6
2.6	Geburts- und Todesprozesse . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Markovsche Bediensysteme</b>	<b>7</b>
3.1	M/M/1 . . . . .	7
3.2	M/M/s/0 . . . . .	8
3.3	M/M/∞ . . . . .	8
3.4	M/M/s/∞ und M/M/s/K . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Warteschlangennetze</b>	<b>9</b>
4.1	offenen Jackson-Netze . . . . .	9
4.2	geschlossene Jackson-Netze . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Allgemeine Bedienzeitverteilung</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>mathrix</b>	<b>13</b>

# 1 Markov-Ketten

## 1.1 Begriffe

$S$	Zustandsraum, gibt die momentane Verteilung der Anforderungen im System an
$X_n$	Zufallsvariable die angibt wie viele Anforderungen momentan im System sind
$P(X_{n+1} = j   X_n = i) = p_{ij}$	Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $n + 1$ $j$ Anforderungen im System sind, unter der Bedingung, dass zum Zeitpunkt $n$ $i$ Anforderungen im System waren
$p(n) = (p_1(n), p_2(n), \dots)$	Gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der zum Zeitpunkt $n$ $1, 2, 3, \dots$ Anforderungen im System sind (mit $p_1(n) = P(X_n = 1)$ )
$p(0)$	Anfangsverteilung
$\Pi$	Übergangsmatrix
$p_{ij}^{(n)}$	Wahrscheinlichkeit in $n$ Schritten von $i$ nach $j$ zu gelangen
$p^*$	Grenzverteilung oder stationäre Verteilung $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = p(0) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n$
aperiodisch	$\Pi^n$ konvergiert nicht (Häufungspunkte existieren)
irreduzibel	es sind immer alle Zustände erreichbar
$f_{ii}^{(n)}$	Wahrscheinlichkeit nach $n$ Schritten erstmals wieder nach $i$ zurückzukehren.
$\mu_i$	Erwartungswert der ersten Rückkehrzeit
rekurrent	Ein Zustand $i$ heißt <i>rekurrent</i> wenn gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$
null-rekurrent	Ein Zustand $i$ heißt <i>null-rekurrent</i> wenn er rekurrent ist und zusätzlich $\mu_i = \infty$ ist
positiv-rekurrent	Ein Zustand $i$ heißt <i>positiv-rekurrent</i> wenn er rekurrent ist und zusätzlich $\mu_i < \infty$ ist
transient	Ein Zustand $i$ heißt <i>transient</i> wenn gilt $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$

**Bemerkung:** Rekurrenz und Transienz sind Eigenschaften aller Zustände, wenn die Markov-Kette irreduzibel ist, d.h. es reicht zu zeigen, dass ein Zustand rekurrent bzw. transient ist.

## 1.2 Formeln

$$\begin{aligned} p^{(n)} &= p(0) \cdot \Pi^n \\ P(X_k = i_k, \dots, X_n = i_n) &= p_{i_k}(k) \cdot \prod_{j=k+1}^n p_{i_{j-1}j} \\ p_{ij}^{(n)} &= (\Pi^n)_{ij} \quad \forall i, j \in \mathcal{S}, n \in \mathbb{N} \\ p_{ij}^{(n+m)} &= \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(n)} \cdot p_{lj}^{(m)} \quad (\text{Chapman-Kolmogorov-Gleichung}) \\ \mu_i &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{ii}^{(n)} \end{aligned}$$

## 1.3 stationäre Verteilung

$p^*$  gibt die stationäre Verteilung für eine Markov-Kette an. Für  $p^*$  gilt:

$$p^* \Pi = p^* \Leftrightarrow (\Pi' - I) p^{*'} = 0$$

Die rechte Gleichung bedeutet, dass man ein homogenes Gleichungssystem erhält, wenn man  $\Pi$  invertiert und in der Diagonalen mit 1 subtrahiert. Dieses Gleichungssystem ist in der Regel unterbestimmt. Mit der Bedingung, dass  $p^*$  stochastisch sein muss ergibt sich eine eindeutige Lösung ( $\sum_{i=1}^n p_i^* = 1$ )

## 2 Markov-Prozesse

### 2.1 Begriffe

$T_n$	Sprungzeiten
$S_n$	Verweilzeiten
$P(X_{s+t} = j   X_s = i) = p_{ij}(t)$	Wahrscheinlichkeit, dass nach einer gewissen Zeit $t$ $j$ Anforderungen im System sind, unter der Bedingung, dass zuvor $i$ Anforderungen im System waren
$\Pi(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{S}}$	Übergangsmatrix mit $\Pi(0) = I$
$p(t) = (p_i(t))_{i \in \mathcal{S}} = (P(X_t = s_1), P(X_t = s_2), \dots)$	Verteilung von $X_t$
$\mathcal{Q}$	Intensitätsmatrix

### 2.2 Formeln

$$\begin{aligned}
 p(t) &= p(0) \cdot \Pi(t) \\
 \Pi(s+t) &= \Pi(s) \cdot \Pi(t) && \text{(Chapman-Kolmogorov-Gleichung)} \\
 \frac{d}{dt} \Pi(t) &= \Pi(t) \cdot \mathcal{Q} && \text{(Kolmogorov-Vorwärts-Differentialgleichung)} \\
 \frac{d}{dt} \Pi(t) &= \mathcal{Q} \cdot \Pi(t) && \text{(Kolmogorov-Rückwärts-Differentialgleichung)} \\
 \mathcal{Q} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\Pi(t) - I) = \left. \frac{d}{dt} \Pi(t) \right|_{t=0^+}
 \end{aligned}$$

### 2.3 stationäre Verteilung

$p^*$  gibt die stationäre Verteilung für einen Markov-Prozess an. Für  $p^*$  gilt:

$$0 = p^* \cdot \mathcal{Q} \Leftrightarrow 0 = \mathcal{Q}' \cdot p^{*'}$$

Die rechte Gleichung bedeutet, dass man ein homogenes Gleichungssystem erhält. Dieses Gleichungssystem ist in der Regel unterbestimmt. Mit der Bedingung, dass  $p^*$  stochastisch sein muss ergibt sich eine eindeutige Lösung ( $\sum_{i=1}^n p_i^* = 1$ )

**Alternative:**

$$\vartheta_0 = 1, \quad \vartheta_j = \frac{\lambda_0 \cdot \dots \cdot \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdot \dots \cdot \mu_j}, \quad j \geq 1$$

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{S}} \vartheta_j}, \quad p_j^* = \vartheta_j \cdot p_0^* \quad j \in \mathcal{S}$$

Bedingung für die Alternative ist die Existenz von:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \vartheta_j < \infty$$

## 2.4 Eingebettete Markov-Kette eines Markov-Prozesses

$\Pi$  nennt man die eingebettete Markov-Kette mit

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad \text{falls } -q_{ii} > 0$$

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \text{falls } -q_{ii} = 0$$

Die Verweilzeit im Zustand  $i \in \mathcal{S}$  ist  $\text{Exp}(-q_{ii})$ -verteilt.

## 2.5 Poisson-Prozesse

Bezeichnung:  $\text{PP}(\lambda)$  mit Intensität  $\lambda$ , Intensitätsmatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Zuwachs im Intervall  $(s, t]$  mit  $0 \leq s < t$ :

$$N_{(t,s]} = N_t - N_s$$

wobei  $N_t \sim \text{Poi}(\lambda t)$ -verteilt, d.h.  $P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$

$$P(N_t = j | P_s = i) = P(N_{(s,t]} = j - i) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(-\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}$$

## 2.6 Geburts- und Todesprozesse

Bezeichnung:  $\text{PP}(\lambda)$  mit Intensität  $\lambda$ , Intensitätsmatrix:

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3 + \mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:** Beim Erstellen eines Intensitätsgraphen werden Intensitäten einzeln betrachtet, d.h. es gibt keinen Übergang mit  $\lambda \cdot \mu$  oder so.

### 3 Markovsche Bediensysteme

#### 3.1 M/M/1

Festes  $\lambda$  (Ankunftsrate), festes  $\mu$  (Bedienrate), Warteschlangenkapazität  $K = \infty$

$$\vartheta_0 = 1, \quad \vartheta_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \rho^j, \quad j \in \mathbb{N}$$

Wenn  $\rho < 1$  konvergiert die Reihe, d.h.

$$p_0^* = 1 - \rho, \quad p_j^* = \rho^j(1 - \rho), \quad j \in \mathbb{N}$$

$X^* \sim (p_0^*, p_1^*, \dots) \sim \text{Geo}(1 - \rho)$ -verteilt beschreibt das System im Gleichgewicht, d.h.

$$P(X^* = j) = p_j^*$$

Erwartungswert und Varianz der Anzahl der Anforderungen im System

$$E(X^*) = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$V(X^*) = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

$W_Q^*$  ist die Wartezeitverteilung in der Warteschlange.

$$P(W_Q^* \leq z) = 1 - \rho \cdot e^{-(\mu - \lambda) \cdot z}$$

$$E(W_Q^*) = \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$$

$$V(W_Q^*) = \frac{2\rho - \rho^2}{\mu^2(1 - \rho)^2}$$

$W^*$  Gesamtverweilzeit (Antwortzeit),  $W^* \sim \text{Exp}(\mu - \lambda)$ -verteilt.

$$E(W^*) = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$V(W^*) = \frac{1}{(\mu - \lambda)^2}$$

Die Wartezeit ergibt sich auch durch

$$E(W_Q^*) = E(W^*) - E(\text{„Bedienzeit“}) \quad (\text{z.B. } E(\text{„Bedienzeit“}) = \frac{1}{\mu})$$

Little's Gesetz

$$E(X^*) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \lambda \cdot E(W^*)$$

wobei  $\lambda$  die Ankunftsintensität angibt. Für die erwartete Länge der Warte schlange gilt:

$$E(Q^*) = \sum_{j=1}^K (j - 1)p_j^* \quad \text{bei M/M/1 System gilt: } K = \infty$$

### 3.2 M/M/s/0

Festes  $\lambda$ , variables  $\mu(n)$  (abhängig von Anzahl der Anforderungen), keine Warteschlange

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -((s-1)\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s\mu & -s\mu \end{pmatrix}$$

Stationäre Verteilung:

$$\vartheta_0 = 1, \quad \vartheta_j = \frac{\lambda^j}{j! \mu^j} \quad j = 0, \dots, s$$

mit  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  folgt

$$p_0^* = \frac{1}{\sum_{j=0}^s \vartheta_j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!}}$$

Somit ergibt sich folgende stationäre Verteilung

$$p_k^* = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!}}$$

D.h. es ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, dass  $i$  Anforderungen im System sind

$$P(X^* = i) = \frac{\frac{\rho^i}{i!}}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!}}$$

Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Anforderung abgewiesen wird, gilt  $i = s$ . Diese Fall wird **Erlang-Blockierwahrscheinlichkeit** oder **Erste Erlangfunktion** genannt. Bezeichnung:

$$E(s, \rho) = B(s, \rho) = \frac{\frac{\rho^s}{s!}}{\sum_{j=0}^s \frac{\rho^j}{j!}}$$

### 3.3 M/M/ $\infty$

Grenzfall  $s \rightarrow \infty$  eines M/M/s Systems. Daraus folgt direkt:

$$p_k^* = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Somit ist  $X^* \sim Poi(\rho)$ -verteilt und es gelten folgende Momente:

$$E(X^*) = \rho, \quad E(W^*) = \frac{1}{\mu} \text{ (mittlere Verweilzeit)}$$

also gilt wie immer Little's Gesetz:

$$E(X^*) = \lambda E(W^*)$$

### 3.4 M/M/s/∞ und M/M/s/K

siehe Skript Seite 39f.

## 4 Warteschlangennetze

Zustandsraum  $S$  ist nun mehrdimensional und seine Mächtigkeit (für geschlossenen Jackson-Netze) beträgt:

$$|S| = \binom{M+J-1}{J-1} = \binom{M+J-1}{M}$$

wobei  $M$  die Anzahl der Aufträge ist und  $J$  die Anzahl der Stationen.

### 4.1 offenen Jackson-Netze

Im Gleichgewicht sollte für jede Station gelten:

$$\Lambda_i^* = \lambda_i + \sum_{j=1}^J \Lambda_j^* r_{ji}$$

löse also zur Bestimmung der stationären Verteilung das Gleichungssystem:

$$\mathbf{\Lambda}^* = \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{\Lambda}^* \widehat{\mathbf{R}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{\Lambda}^* (\mathbf{I} - \widehat{\mathbf{R}}) = \boldsymbol{\lambda}$$

Zur Berechnung der stationären Verteilung benötigt man weiter hin  $k_i$

$$k_i = \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\Lambda_i^*)^l}{\mu_i(1) \cdot \dots \cdot \mu_i(l)} \right]^{-1}, \quad i = 1, \dots, J$$

Es existiert eine stationäre Verteilung, wenn gilt  $\frac{1}{k_i} < \infty$  für alle  $i = 0, \dots, J$ . Die stationäre Verteilung  $p^*(\mathbf{n})$  ist dann:

$$p^*(\mathbf{n}) = p_1^*(n_1) \cdot \dots \cdot p_J^*(n_J)$$

mit

$$p_i^*(n_i) = k_i \cdot \frac{(\Lambda_i^*)^{n_i}}{\mu_i(1) \cdot \dots \cdot \mu_i(n_i)} = P(X_i^* = n_i)$$

**Bemerkung:** Der Gesamtfluss in einem offenen Jackson-Netz beträgt:

$$\Lambda_{ges} = \sum_{i=1}^J \Lambda_i^*$$

**Außerdem:** Für die Anforderungen in einer Station gilt:

$$E(X_i^*) = \frac{\lambda_i}{\mu_i - \lambda_i} \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^J \Lambda_j^* r_{ij}$$

## 4.2 geschlossene Jackson-Netze

Im Gleichgewicht sollte für jede Station gelten:

$$\Lambda_i^* = \sum_{j=1}^J \Lambda_j^* r_{ji}$$

löse also zur Bestimmung der stationären Verteilung das Gleichungssystem:

$$\mathbf{\Lambda}^* = \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{R}$$

Zur Berechnung der stationären Verteilung benötigt man weiter hin  $K_M$ .  $K_M$  kann rekursiv berechnet werden (nur möglich wenn  $\mu_i(n_i) = \mu_i$ ).

Setze:

$$\gamma_i = \frac{\Lambda_i^*}{\mu_i}$$

$$C_l(1) = \gamma_1^l \quad l \in 0, 1, \dots, M$$

$$C_0(j) = 1 \quad j \in 1, 2, \dots, J$$

für  $C_l(j)$  gilt:

$$C_l(j) = C_l(j-1) + \gamma_i C_{l-1}(j)$$

$l \setminus j$	1	2	3	4
0	1	1	1	1
1	$\gamma_1$	$\gamma_1 + \gamma_2$	$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$	$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$
2	$\gamma_1^2$	$\gamma_1^2 + \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)$	$\gamma_1^2 + \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3)$	$C_2(4)$

Für  $K_M$  gilt dann:

$$K_M = \frac{1}{C_M(J)}$$

Wenn **nicht**  $\mu_i(n_i) = \mu_i$  gilt, wird  $K_M$  wie folgt berechnet:

Berechne zunächst:

$$K'_M = \prod_{i=1}^J \gamma_i^{n_i} = \prod_{i=1}^J \frac{\Lambda_i^{*n_i}}{\mu_i(1) \cdot \dots \cdot \mu_i(n_i)}$$

und vereinfache diesen Term so weit wie möglich! Es gilt dann für  $K_M$ :

$$K_M = \left[ \sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1 + \dots + n_J = M}} K'_M \right]^{-1}$$

Das bedeutet, man muss jedes Tupel des Zustandsraums in den Term  $K'_M$  einsetzen und die Ergebnisse summieren. Am Ende noch die Reziproke bilden. Fertig!

Für die stationäre Verteilung  $p^*(\mathbf{n})$  gilt dann:

$$p^*(\mathbf{n}) = K_M \prod_{i=1}^J \gamma_i^{n_i}$$

Des Weiteren lassen sich noch folgende Größen für geschlossene Jackson-Netze berechnen:

Auslastung des  $i$ -ten Knotens:

$$\rho_i = P(X_i^* > 0) = \gamma_i \frac{C_{M-1}(J)}{C_M(J)}$$

Komplementäre Verteilungsfunktion:

$$P(X_i^* \geq k) = \gamma_i^k \frac{C_{M-k}(J)}{C_M(J)} \quad k = 0, \dots, M$$

Erwartungswerte:

$$E(X_i^*) = \frac{1}{C_M(J)} \sum_{l=1}^M \gamma_i^l C_{M-l}(J)$$

Durchsatz bei Knoten  $i$ :

$$\lambda_i = \mu_i P(X_i^* > 0) = \Lambda_i \frac{C_{M-1}(J)}{C_M(J)}$$

In geschlossenen Jackson-Netzen kann die Randverteilung wie folgt berechnet werden:

$$q_j^*(m) = P(X_j^* = m) \quad j \in 1, 2, \dots, J \quad m \in 0, 1, \dots, M$$

Beispiel:  $q_i^*(0)$ , die Wahrscheinlichkeit, dass keine Auftrag in Station  $i$  ist:

$$q_i^*(0) = \sum p^* (\text{alle Permutationen bei denen die } i\text{-te Komponente } 0 \text{ ist})$$

## 5 Allgemeine Bedienzeitverteilung

- Bedienzeiten  $Y_n$  sind nicht mehr unbedingt exponential verteilt. Es gilt  $Y_n \sim G$
- $E(Y_n) = \nu$ ,  $\mu = \frac{1}{\nu}$  heißt Bedienrate (in Anlehnung an M/M/1)
- $X(t)$ : Anzahl der Anforderungen im System zum Zeitpunkt  $t$ .
- $D_n$ : Abgangszeitpunkt der  $n$ -ten Anforderung
- $X_n = X(D_n+)$ : Anzahl der Anforderungen im System sofort nach dem Abgang der  $n$ -ten Anforderung
- $A_n$ : Anzahl der Anforderungen, die während der Bedienzeit in der  $n$ -ten Anforderung ankommt.

Wenn eine erzeugende Funktion gegeben ist, dann lässt sich die **stationäre Verteilung** wie folgt berechnen:

$$p_k^* = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k}{dz^k} H(z) \right|_{z=0}$$

Formeln siehe Skript ab Seite 53.

## 6 matrix

Binomialkoeffizient:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Erwartungswert für diskrete Zufallsvariablen:

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P(X = k)$$

Rechenregel für Erwartungswerte:

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Reihenentwicklung e-Funktion:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

unendliche geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \quad q < 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)q^i = \frac{d}{dq} \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

endliche geometrische Reihe:

$$\sum_{i=0}^n q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad q \neq 1$$

$$\sum_{i=0}^n q^i = n+1 \quad q = 1$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P(A|B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Bayes Formel:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$